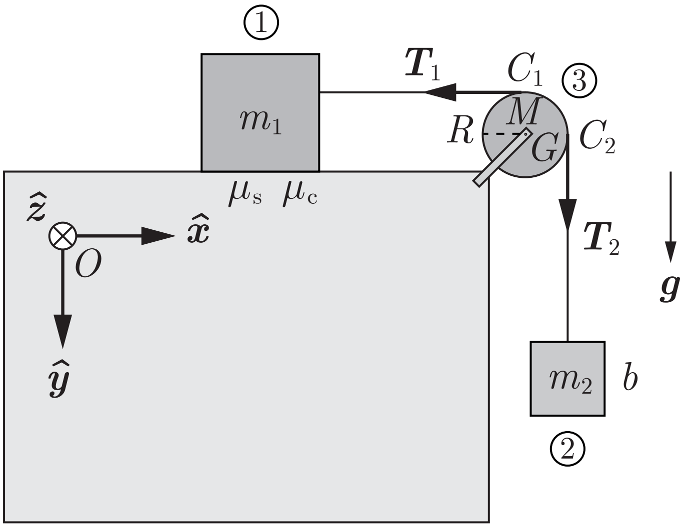
1. Système avec frottement (6.5/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un bloc (1), considéré comme un point matériel de masse m_1, est posé sur un plan horizontal et attaché à un fil inextensible de masse négligeable qui passe au-dessus d'une poulie (3) de masse M et de rayon R. Un bloc (2), considéré comme un point matériel de masse m_2, est suspendu à l'autre extrémité du fil. Le frottement sec entre le bloc (1) et le plan horizontal est caractérisé par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement cinétique μ_c. Le frottement visqueux entre le bloc (2) et l'air est caractérisé par la force de frottement $\boldsymbol{F}_{f,2} = -\,b\,\boldsymbol{v}_2$ où $\boldsymbol{v}_2$ est la vitesse du bloc (2) et le coefficient $b > 0$. Le mouvement de rotation propre de la poulie (3) est caractérisé par le moment d'inertie $\lambda\,MR^2$, où $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1$, par rapport à l'axe de rotation horizontal qui passe par son centre de masse G.

Le fil se déplace avec le mouvement de rotation propre de la poulie (3) sans glisser. Ce mouvement est caractérisé par les tensions $\boldsymbol{T}_1 = -\,T_1\,\hat{\boldsymbol{x}}$ et $\boldsymbol{T}_2 = T_2\,\hat{\boldsymbol{y}}$ exercées par le fil sur la poulie (3) aux points de contact C_1 et C_2 respectivement. Pour décrire la dynamique du système, on choisit un repère cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ où le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{x}}$ est orienté le long de l'axe horizontal vers la droite, le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{y}}$ est orienté le long de l'axe vertical vers le bas et le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{z}}$ entre dans le plan vertical ci-dessus.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cartésiennes x, y, z et z et de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.5 points**) Déterminer les équations scalaires du mouvement de chaque bloc en utilisant la loi d'action-réaction entre les blocs et la poulie.

   Les vecteurs accélérations des blocs 1 et 2 s'écrivent,

   $$\boldsymbol{a}_1 = \ddot{x}_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \ddot{y}_2\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{1}$$

   Les forces extérieures exercées sur le bloc 1 en mouvement sont son poids $\boldsymbol{P}_1$, la force de réaction normale du plan $\boldsymbol{N}_1$, la tension $-\boldsymbol{T}_1$ et la force de frottement cinétique $\boldsymbol{F}_{f,1}$ qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes comme,

   $$\boldsymbol{P}_1 = m_1\,\boldsymbol{g} = m_1 g\,\hat{\boldsymbol{y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{N}_1 = -\,N_1\,\hat{\boldsymbol{y}} \quad \text{et} \quad -\,\boldsymbol{T}_1 = T_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F}_{f,1} = -\,\mu_c\,N_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

   où le signe négatif devant la tension $\boldsymbol{T}_1$ est due à la loi d'action-réaction entre la poulie et le bloc. La loi du mouvement du bloc 1 s'écrit,

   $$\boldsymbol{F}_1^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{F}_{f,1} = m_1\,\boldsymbol{a}_1 \tag{3}$$

   En substituant les expressions de l'accélération (1) et des forces extérieures (2) dans la loi vectorielle du mouvement (3) du bloc 1, et en la projetant le long des lignes de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

   $$\text{1} \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad T_1 - \mu_c\,N_1 = m_1\ddot{x}_1 \tag{4}$$
   $$\text{1} \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_1 g - N_1 = 0 \tag{5}$$

   On peut s'affranchir de la norme de la force de réaction normale N_1 en combinant les équations (4) et (5). Ainsi, l'équation du mouvement du bloc 1 devient,

   $$\text{1} \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad T_1 - \mu_c\,m_1 g = m_1\ddot{x}_1 \tag{6}$$

   Les forces extérieures exercées sur le bloc 2 en mouvement sont son poids $\boldsymbol{P}_2$, la tension $-\boldsymbol{T}_2$ et la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_{f,2}$ qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes comme,

   $$\boldsymbol{P}_2 = m_2\,\boldsymbol{g} = m_2 g\,\hat{\boldsymbol{y}} \quad \text{et} \quad -\,\boldsymbol{T}_2 = T_2\,\hat{\boldsymbol{y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F}_{f,2} = -\,b\,\boldsymbol{v}_2 = -\,b\dot{y}_2\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{7}$$

   où le signe négatif devant la tension $\boldsymbol{T}_2$ est due à la loi d'action-réaction entre la poulie et le bloc. La loi du mouvement du bloc 2 s'écrit,

   $$\boldsymbol{F}_2^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{F}_{f,2} = m_2\,\boldsymbol{a}_2 \tag{8}$$

   En substituant les expressions de l'accélération (1) et des forces extérieures (7) dans la loi vectorielle du mouvement (8) du bloc 2, et en la projetant le long de la ligne de coordonnée verticale, on obtient l'équation scalaire suivante,

   $$\text{2} \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_2 g - T_2 - b\dot{y}_2 = m_2\ddot{y}_2 \tag{9}$$

2. (**1.0 point**) Déterminer la différence $T_2 - T_1$ entre les normes des tensions T_1 et T_2 en termes de l'accélération angulaire scalaire de la poulie $\ddot{\psi}$ où l'angle de rotation propre ψ est défini positif pour une rotation de la poulie dans le sens des aiguilles d'une montre.

   Le théorème du moment cinétique appliqué à la poulie et évalué au centre de masse G de la poulie s'écrit,

   $$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_G \tag{10}$$

   L'axe de rotation est un axe principal d'inertie, ce qui implique que le moment cinétique $\boldsymbol{L}_G$ est colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$,

   $$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\Omega} \tag{11}$$

où le moment inertie I_G est constant. Les moments de force non-nuls évalués au centre de masse sont les moments de forces des tensions $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$. Ainsi, le théorème du moment cinétique (10) s'écrit,

$$\boldsymbol{GC}_1 \times \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{GC}_2 \times \boldsymbol{T}_2 = I_G\,\dot{\boldsymbol{\Omega}} \tag{12}$$

Le moment d'inertie s'écrit,

$$I_G = \lambda\, M R^2 \tag{13}$$

et les vecteurs vitesse angulaire et accélération angulaire sont définis comme,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{et} \qquad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{14}$$

Compte tenu des équations (13) et (14), le théorème du moment cinétique (12) est exprimé dans le repère d'inertie cartésien comme,

$$(-\,R\,\hat{\boldsymbol{y}}) \times (-\,T_1\,\hat{\boldsymbol{x}}) + (R\,\hat{\boldsymbol{x}}) \times (T_2\,\hat{\boldsymbol{y}}) = \lambda\, M R^2 \ddot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{15}$$

et se réduit à,

$$-\,R\,T_1\,\hat{\boldsymbol{z}} + R\,T_2\,\hat{\boldsymbol{z}} = \lambda\, M R^2 \ddot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{16}$$

Ainsi, la différence $T_2 - T_1$ entre les normes des tensions est donnée par,

$$T_2 - T_1 = \lambda\, M R\,\ddot{\psi} \tag{17}$$

3. (**0.5 point**) Donner la condition liant les dérivées temporelles secondes des coordonnées cartésiennes des blocs 1 et 2.

   Pour un fil inextensible, la norme du vecteur accélération $\boldsymbol{a}_1$ du bloc 1 est égale à la norme du vecteur accélération $\boldsymbol{a}_2$ du bloc 2. Compte tenu des équations (1), cette condition s'écrit,

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = \|\boldsymbol{a}_2\| \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 \qquad \text{car} \qquad \ddot{x}_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{y}_2 > 0 \tag{18}$$

4. (**0.5 point**) Exprimer l'accélération scalaire $\ddot{y}_2$ du bloc 2 en termes de l'accélération angulaire scalaire $\ddot{\psi}$ de la poulie.

   Comme le fil ne glisse pas sur la poulie, la vitesse $\boldsymbol{V}_{C_2}$ du point de contact C_2 est liée à la vitesse $\boldsymbol{V}_G$ du centre de masse G immobile par la relation cinématique,

$$\boldsymbol{V}_{C_2} = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{GC}_2 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{GC}_2 \tag{19}$$

   Compte tenu de l'équation (14) et étant donné que $\boldsymbol{GC}_2 = \textbf{cste}$, la dérivée temporelle de la relation (19) s'écrit,

$$\boldsymbol{A}_{C_2} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{GC}_2 = \left(\ddot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}}\right) \times (R\,\hat{\boldsymbol{x}}) = R\ddot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{20}$$

   Compte tenu de l'équation (1) vu que le fil est inextensible, l'accélération $\boldsymbol{a}_2 = \ddot{y}_2\,\hat{\boldsymbol{y}}$ du bloc 2 est la même que l'accélération (20) du point de contact C_2,

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{A}_{C_2} \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{y}_2 = R\ddot{\psi} \tag{21}$$

5. (**1.0 point**) Déterminer l'équation du mouvement du système formé des deux blocs uniquement en termes des grandeurs scalaires m_1, m_2, g, b, μ_c, λ, M, $\dot{y}_2$ et $\ddot{y}_2$.

   Compte tenu de la condition (18), l'équation du mouvement (6) du bloc 1 devient,

$$T_1 - \,\mu_c\, m_1\, g = m_1 \ddot{y}_2 \tag{22}$$

La somme des équations du mouvement (9) et (22) s'écrit,

$$m_2 g - \mu_c m_1 g + T_1 - T_2 - b\dot{y}_2 = (m_1 + m_2)\,\ddot{y}_2 \tag{23}$$

Compte tenu de la condition (21), l'équation (17) devient,

$$T_2 - T_1 = \lambda M \ddot{y}_2 \tag{24}$$

L'équation du mouvement du système formé des deux blocs est obtenue en sommant les équations (23) et (24),

$$(m_2 - \mu_c m_1)\, g - b\dot{y}_2 = (m_1 + m_2 + \lambda M)\,\ddot{y}_2 \tag{25}$$

6. (**0.5 point**) Déterminer la vitesse scalaire limite $v_{2,\ell}$ de chute du bloc 2.

Dans la limite où le bloc 2 atteint sa vitesse scalaire limite de chute $v_{2,\ell} = \dot{y}_2$ son accélération est nulle, i.e. $\ddot{y}_2 = 0$. Ainsi, dans cette limite, l'équation du mouvement (25) se réduit à,

$$(m_2 - \mu_c m_1)\, g - b v_{2\ell} = 0 \tag{26}$$

et la vitesse scalaire limite de chute s'écrit,

$$v_{2\ell} = (m_2 - \mu_c m_1)\,\frac{g}{b} \tag{27}$$

7. (**1.5 point**) Déterminer la condition pour que le système formé des deux blocs et de la poulie reste immobile (i.e. en régime statique) en termes des masses m_1 et m_2 des deux blocs.

La force de frottement statique exercée par le plan sur le bloc 1 s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_{f,1} = -\,F_{f,1}\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{28}$$

La condition imposée pour que le bloc 1 soit en régime de frottement statique est,

$$F_{f,1} < \mu_s N_1 \tag{29}$$

A l'équilibre, la loi du mouvement du bloc 1 se réduit à,

$$\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{F}_{f,1} = \boldsymbol{0} \tag{30}$$

Compte tenu des forces extérieures (2) et (28), les projections de l'équation d'équilibre (30) le long des lignes de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical s'écrivent,

$$1 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad -F_{f,1} + T_1 = 0 \tag{31}$$

$$1 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_1 g - N_1 = 0 \tag{32}$$

Compte tenu des équations (31) et (32), la condition (29) devient,

$$T_1 < \mu_s m_1 g \tag{33}$$

A l'équilibre, la loi du mouvement du bloc 2 se réduit à,

$$\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{0} \tag{34}$$

Compte tenu des forces extérieures (7) et (28), les projections de l'équation d'équilibre (34) le long de la ligne de coordonnée verticale s'écrit,

$$2 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_2 g - T_2 = 0 \tag{35}$$

A l'équilibre, l'équation du mouvement de rotation propre de la poulie (17) se réduit à,

$$T_1 - T_2 = 0 \tag{36}$$

Compte tenu des équations (35) et (36), on obtient,

$$T_1 = m_2 g \tag{37}$$

En substituant l'équation (37) dans la condition (33), celle-ci devient,

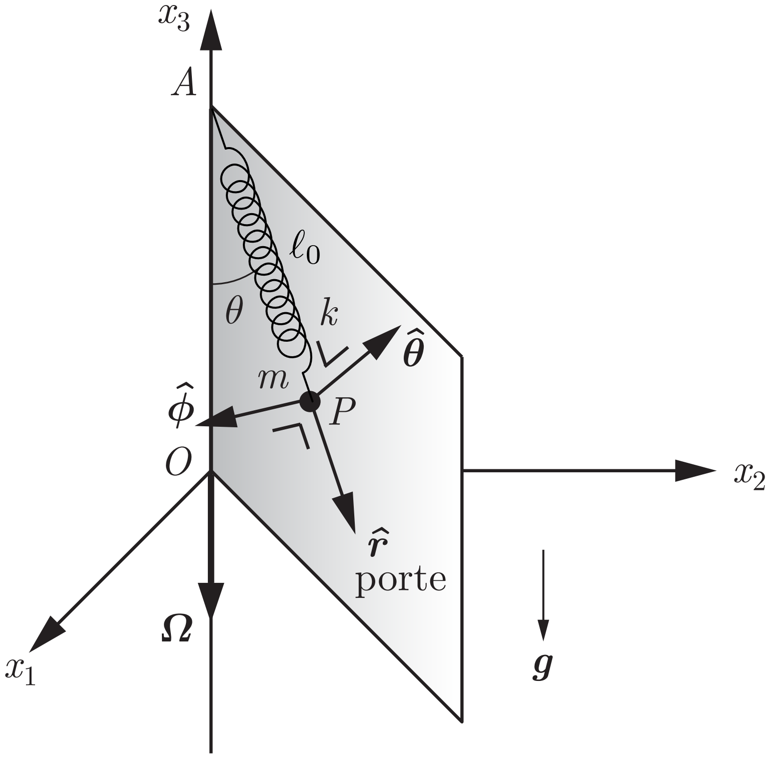
$$m_2 < \mu_s m_1 \tag{38}$$

2. Ressort sur porte tournante (6.5/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un oscillateur harmonique est constitué d'un point matériel P de masse m attaché à l'extrémité d'un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité est suspendue à un point fixe A de la charnière d'une porte. L'oscillateur est astreint à se déplacer dans le plan vertical de la porte qui a un mouvement de rotation autour de l'axe vertical Ox_3 avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = -\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Il n'y a aucune force de frottement à considérer dans ce problème.

On attache un repère sphérique $(P, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ au point matériel P de sorte que les vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ soient toujours contenus dans le plan vertical de la porte et que le vecteur de base $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ soit orthogonal à ce plan et orienté dans le sens des aiguilles d'une montre en vue d'avion.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées sphériques r, θ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ du repère sphérique, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Déterminer les vecteurs force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ et force de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$ exercés sur le point matériel P dans le référentiel relatif de la porte.

   La position relative $\boldsymbol{r}_r\,(P)$, la vitesse relative $\boldsymbol{v}_r\,(P)$ et l'accélération relative $\boldsymbol{a}_r\,(P)$ du point matériel P dans le référentiel de la porte s'écrivent en coordonnées sphériques comme,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_r\,(P) &= r\,\hat{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{v}_r\,(P) &= \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{a}_r\,(P) &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \tag{1}$$

   Le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est donné en coordonnées sphériques par,

$$\boldsymbol{\Omega} = -\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \Omega\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{2}$$

   Compte tenu des grandeurs cinématiques (1) et (2), la force centrifuge s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_c = -\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_r\,(P)\right) = -\,mr\Omega^2\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\times\left(\left(\cancel{\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\times\hat{\boldsymbol{r}}\right) \tag{3}$$

   Ainsi,

$$\boldsymbol{F}_c = mr\sin\theta\,\Omega^2\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{4}$$

   où le vecteur unitaire radial horizontal $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Compte tenu des grandeurs cinématiques (1) et (2), la force de Coriolis s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r\,(P) = 2\,m\Omega\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}\right)\times\left(\dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{5}$$

   Ainsi,

$$\boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\Omega\left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{6}$$

2. (**1.5 point**) Déterminer le vecteur force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercé par la porte sur le point matériel P.

   Les forces extérieures qui s'exercent sur la bille sont la force élastique $\boldsymbol{F}_e$ exercée par le ressort, la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ du tube sur la bille et le poids $\boldsymbol{P}$ de la bille qui sont exprimées en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{F}_e = -\,k\,(r - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{r}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{N} = N_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 = mg\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{9}$$

   Solution 1 : La loi vectorielle du mouvement relatif s'écrit,

$$\sum\boldsymbol{F}^{\,\mathrm{ext}} + \sum\boldsymbol{F}^{\,\mathrm{in}} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \tag{10}$$

   En substituant les expressions (7), (8) et (9) des forces extérieures, les expressions (4) et (6) des forces d'inertie et l'expression (1) de l'accélération relative dans la loi vectorielle du mouvement relatif (10), et en la projetant le long des lignes de coordonnées sphériques, on obtient les trois équations scalaires suivantes,

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{r}}:\quad -\,k\,(r - \ell_0) + mg\cos\theta + mr\Omega^2\sin^2\theta = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \tag{11}$$

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}:\quad -\,mg\sin\theta + mr\Omega^2\sin\theta\cos\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta}\right) \tag{12}$$

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}:\quad N_\phi - 2\,m\Omega\left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0 \tag{13}$$

En substituant l'équation de contrainte (13) dans l'équation (8), la force de réaction normale s'écrit,

$$\boldsymbol{N} = N_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = 2m\Omega\left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{14}$$

où la force de réaction normale satisfait la condition $\boldsymbol{N} = -\,\boldsymbol{F}_C$.

Solution 2 : La loi vectorielle du mouvement absolu s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{a}_a\,(P) \tag{15}$$

où l'accélération absolue du point P est écrite en coordonnées sphériques comme,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_a\,(P) = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\Omega^2\sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\Omega^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \left(2\dot{r}\Omega\sin\theta + 2r\dot{\theta}\Omega\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{16}$$

En substituant les expressions (7), (8) et (9) des forces extérieures et l'expression (16) de l'accélération absolue dans la loi vectorielle du mouvement absolu (15), et en la projetant le long des lignes de coordonnées sphériques, on obtient les trois équations scalaires suivantes,

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{r}}: \quad -\,k\,(r - \ell_0) + mg\cos\theta = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\Omega^2\sin^2\theta\right) \tag{17}$$

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}: \quad -\,mg\sin\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\Omega^2\sin\theta\cos\theta\right) \tag{18}$$

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}: \quad N_\phi = m\left(2\dot{r}\Omega\sin\theta + 2r\dot{\theta}\Omega\cos\theta\right) \tag{19}$$

En substituant l'équation de contrainte (19) dans l'équation (8), la force de réaction normale s'écrit,

$$\boldsymbol{N} = N_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = 2m\Omega\left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{20}$$

3. (**1.0 point**) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du point matériel P dans le référentiel absolu du bâtiment en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le haut de la porte qui contient le point A et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort au repos.

   L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique T, de l'énergie potentielle de pesanteur V_g et de l'énergie potentielle élastique V_e

$$E = T + V_g + V_e = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}^2 - mgh + \frac{1}{2}\,k\,d^2 \tag{21}$$

   qui s'écrit explicitement comme,

$$E = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\Omega^2\sin^2\theta\right) - mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}\,k\,(r - \ell_0)^2 \tag{22}$$

4. (**1.0 point**) Dans le cas particulier où l'angle d'inclinaison θ de l'oscillateur est maintenu constant, i.e. $\theta = \theta_0 =$ cste, déterminer la condition sur la vitesse angulaire scalaire Ω pour qu'il y ait des oscillations autour d'une coordonnée radiale d'équilibre en utilisant l'équation du mouvement radial, et déterminer alors la coordonnée radiale d'équilibre r_0.

   Dans le cas particulier où $\theta = \theta_0 =$ cste, l'équation du mouvement radial de la bille (11) ou (17) peut être écrite comme,

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta\right)r - g\cos\theta_0 - \frac{k}{m}\,\ell_0 = 0 \tag{23}$$

et mise sous la forme suivante,

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \sin^2\theta\right)\left(r - \frac{g\cos\theta_0 + \dfrac{k}{m}\,\ell_0}{\dfrac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta}\right) = 0 \tag{24}$$

A l'aide du changement de variable,

$$\rho = r - \frac{g\cos\theta_0 + \dfrac{k}{m}\,\ell_0}{\dfrac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta} \tag{25}$$

l'équation du mouvement radiale (24) se réduit à,

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta\right)\rho = 0 \tag{26}$$

Pour qu'il y ait des oscillations autour d'une position radiale d'équilibre, il faut que l'équation du mouvement radial (26) soit un oscillateur harmonique de la forme,

$$\ddot{\rho} + \omega^2\rho = 0 \tag{27}$$

La comparaison entre les équations du mouvement oscillatoire (26) et (27) implique que,

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta > 0 \tag{28}$$

ce qui impose la condition,

$$\Omega < \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{29}$$

La coordonnée radiale d'équilibre r_0 est obtenue en annulant la déviation à l'équilibre, i.e $\rho = 0$. Compte tenu du changement de variable (25), on obtient,

$$r_0 = \frac{g\cos\theta_0 + \dfrac{k}{m}\,\ell_0}{\dfrac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta} \tag{30}$$

5. (**1.0 point**) Dans le cas particulier où la longueur du ressort est maintenue constante, i.e. $r = \ell = \text{cste}$, déterminer les angles d'équilibre $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$.

   Dans le cas particulier où $r = \ell = \text{cste}$, l'équation du mouvement nodal de la bille (12) ou (18) peut être écrite comme,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0 \tag{31}$$

   A l'équilibre $\theta = \theta_0 = \text{cste}$, l'équation du mouvement nodal (31) se réduit à,

$$\left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\cos\theta_0\right)\sin\theta_0 = 0 \tag{32}$$

   Les deux angles d'équilibre sont,

$$\theta_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \arccos\left(\frac{g}{\ell\,\Omega^2}\right) \tag{33}$$

   où la condition d'existence de l'angle d'équilibre θ_2 est,

$$\Omega^2 \geqslant \frac{g}{\ell} \tag{34}$$

6. (**1.0 point**) Dans le cas particulier de la question précédente, déterminer la pulsation ω des petites oscillations autour de la position d'équilibre θ_2 lorsque $\Omega^2 \geqslant g/\ell$ en utilisant les développement limités au 1^er^ ordre en $\alpha = \theta - \theta_2 \ll 1$ autour de θ_2,

$$\sin\theta = \sin(\theta_2 + \alpha) \simeq \sin\theta_2 + \cos\theta_2\,\alpha$$
$$\cos\theta = \cos(\theta_2 + \alpha) \simeq \cos\theta_2 - \sin\theta_2\,\alpha$$

et en négligeant les termes en α^2 dans l'équation du mouvement. Montrer explicitement par calcul si $\omega > \Omega$ ou $\omega = \Omega$ ou alors $\omega < \Omega$.

Les petites oscillations autour de la position d'équilibre θ_2 sont décrites par l'angle de déviation à l'équilibre, $\alpha = \theta - \theta_2 \ll 1$. Ainsi,

$$\ddot{\theta} = \ddot{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \sin\theta_2 + \cos\theta_2\,\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \cos\theta_2 - \sin\theta_2\,\alpha \tag{35}$$

Compte tenu des relations (35), l'équation du mouvement nodal (31) devient,

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\left(\cos\theta_2 - \sin\theta_2\,\alpha\right)\right)\left(\sin\theta_2 + \cos\theta_2\,\alpha\right) = 0 \tag{36}$$

En négligeant les termes en α^2, l'équation du mouvement nodal (36) est mise sous la forme,

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{\ell}\cos\theta_2 + \Omega^2\left(\sin^2\theta_2 - \cos^2\theta_2\right)\right)\alpha + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\cos\theta_2\right)\sin\theta_2 = 0 \tag{37}$$

Compte tenu de l'angle d'équilibre (33), l'équation du mouvement nodal se réduit à l'équation du mouvement harmonique oscillatoire,

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{\ell}\cos\theta_2 + \Omega^2\left(\sin^2\theta_2 - \cos^2\theta_2\right)\right)\alpha = 0 \tag{38}$$

de pulsation,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}\cos\theta_2 + \Omega^2\left(\sin^2\theta_2 - \cos^2\theta_2\right)} = \sqrt{\frac{g}{\ell}\cos\theta_2 + \Omega^2\left(1 - 2\cos^2\theta_2\right)} \tag{39}$$

Compte tenu de l'angle d'équilibre (33), la pulsation (39) se réduit à,

$$\omega = \sqrt{\frac{g^2}{\ell^2\Omega^2} + \Omega^2\left(1 - 2\,\frac{g^2}{\ell^2\Omega^4}\right)} = \Omega\sqrt{1 - \frac{g^2}{\ell^2\Omega^4}} < \Omega \tag{40}$$

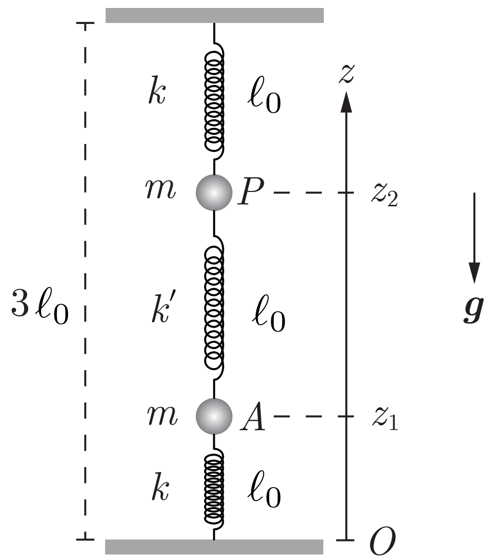
où la différence de termes sous la racinée carrée est positive compte tenu de la condition d'existence (34) de l'angle d'équilibre θ_2.

3. Oscillateurs couplés (7.0/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un oscillateur harmonique constitué d'un point matériel P de masse m est suspendu à l'extrémité d'un premier ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 qui est attaché à un point fixe d'un plafond. Un oscillateur harmonique constitué d'un point matériel A de masse m est suspendu à l'extrémité d'un deuxième ressort de constante élastique k' et de longueur à vide ℓ_0 qui est attaché au point P. Finalement, un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 est attaché au point A et fixé à l'origine O au plancher. Les oscillateurs sont astreints à se déplacer selon l'axe vertical Oz dont le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{z}}$ est orienté vers le haut. Il n'y a aucune force de frottement à considérer dans ce problème.

La coordonnée verticale du point A est z_1 et la coordonnée verticale du point P est z_2. Ces coordonnées sont définies par rapport à l'origine O. La distance qui sépare le plafond du plancher est $3\ell_0$. La coordonnée verticale du centre de masse Z_G et la coordonnée verticale relative z sont définies comme,

$$Z_G = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2\right) \qquad \text{et} \qquad z = z_2 - z_1$$

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées verticales z_1, z_2, Z_G et z, et de leurs dérivées temporelles, du vecteur de base $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.5 point**) Déterminer le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,1b}$ exercé par le ressort du bas et le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,1c}$ exercé par le ressort du centre sur le point matériel de masse m en A, ainsi que l'équation scalaire du mouvement absolu du point matériel A selon l'axe vertical Oz.

   Les vecteurs force élastiques $\boldsymbol{F}_{e,1b}$ et $\boldsymbol{F}_{e,1c}$ exercés sur le point matériel de masse m en A s'écrivent,

   $$\boldsymbol{F}_{e,1b} = -\,k\,(z_1 - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}_{e,1c} = k'\,(z_2 - z_1 - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1}$$

   Le poids $\boldsymbol{P}_1$ de ce point matériel est,

   $$\boldsymbol{P}_1 = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2}$$

   et son accélération absolue $\boldsymbol{a}_a\,(A)$ s'écrit,

   $$\boldsymbol{a}_a\,(A) = \ddot{z}_1\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3}$$

   La loi du mouvement absolu du point matériel de masse m en A s'écrit,

   $$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{F}_{e,1b} + \boldsymbol{F}_{e,1c} = m\,\boldsymbol{a}_a\,(A) \tag{4}$$

   Compte tenu des équations (1), (2) et (3), la projection de l'équation du mouvement absolu (4) le long de la ligne de coordonnée verticale s'écrit,

   $$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad -\,mg - \,k\,(z_1 - \ell_0) + k'\,(z_2 - z_1 - \ell_0) = m\ddot{z}_1 \tag{5}$$

   qui peut être mise sous la forme,

   $$\ddot{z}_1 = -\,\frac{k}{m}\,(z_1 - \ell_0) + \frac{k'}{m}\,(z_2 - z_1 - \ell_0) - g \tag{6}$$

2. (**2.5 points**) Déterminer le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,2h}$ exercé par le ressort du haut et le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,2c}$ exercé par le ressort du centre sur le point matériel P. Déterminer aussi la force de translation $\boldsymbol{F}_t$ et l'accélération relative $\boldsymbol{a}_r\,(P)$ du point matériel P dans le référentiel relatif où le point A est au repos. En déduire l'équation scalaire du mouvement relatif du point matériel P selon l'axe vertical Oz.

   Le poids du point matériel de masse m en P s'écrit,

   $$\boldsymbol{P}_2 = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{7}$$

   Les vecteurs force élastiques $\boldsymbol{F}_{e,2h}$ et $\boldsymbol{F}_{e,2c}$ exercés sur le point matériel de masse m en A s'écrivent,

   $$\boldsymbol{F}_{e,2h} = -\,k\,(z_2 - 2\ell_0)\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}_{e,2c} = -\,k'\,(z_2 - z_1 - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{8}$$

   D'après la 3$^{\text{e}}$ loi de Newton appliqué au système constitué des deux points matériels, la somme vectorielle des forces d'action $\boldsymbol{F}_{e,2c}$ et de réaction $\boldsymbol{F}_{e,1c}$ s'annule. En effet, d'après les équations (1) et (8),

   $$\boldsymbol{F}_{e,1c} + \boldsymbol{F}_{e,2c} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

   Compte tenu de l'accélération absolue (3), la force de translation s'écrit,

   $$\boldsymbol{F}_t = -\,m\,\boldsymbol{a}_a\,(A) = -\,m\ddot{z}_1\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{10}$$

   L'accélération absolue du poids matériel P est de la forme suivante,

   $$\boldsymbol{a}_a\,(P) = \ddot{z}_2\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{11}$$

L'accélération relative $\boldsymbol{a}_r\,(P)$ du point matériel P dans le référentiel relatif où le point A est au repos est liée à son accélération absolue $\boldsymbol{a}_a\,(P)$ par la relation cinématique,

$$\boldsymbol{a}_a\,(P) = \boldsymbol{a}_a\,(A) + \boldsymbol{a}_r\,(P) \tag{12}$$

Compte tenu des équations (3), (11) et (12), l'accélération relative du point matériel P s'écrit,

$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1)\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{13}$$

La loi du mouvement relatif du point matériel de masse m en A s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{F}_{e,2h} + \boldsymbol{F}_{e,2c} + \boldsymbol{F}_t = m\,\boldsymbol{a}_r\,(A) \tag{14}$$

Compte tenu des équations (7), (8), (10) et (13), la projection de l'équation du mouvement absolu (14) le long de la ligne de coordonnée verticale s'écrit,

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{z}}: \quad -\,mg - k\,(z_2 - 2\ell_0) - k'\,(z_2 - z_1 - \ell_0) - m\ddot{z}_1 = m\,(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) \tag{15}$$

qui peut être mise sous la forme,

$$\ddot{z}_2 = -\,\frac{k}{m}\,(z_2 - 2\ell_0) - \frac{k'}{m}\,(z_2 - z_1 - \ell_0) - g \tag{16}$$

3. (**1.0 point**) Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse en termes de la coordonnée verticale Z_G et de ses dérivées temporelles, et l'équation du mouvement relatif en termes de la coordonnée verticale z et de ses dérivées temporelles.

La coordonnée verticale du centre de masse Z_G et sa dérivée temporelle seconde $\ddot{Z}_G$ s'écrivent,

$$Z_G = \frac{1}{2}\,(z_1 + z_2) \qquad \text{et} \qquad \ddot{Z}_G = \frac{1}{2}\,(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) \tag{17}$$

La moitié de la somme des équations du mouvement (6) et (16) s'écrit,

$$\frac{1}{2}\,(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -\,\frac{k}{m}\left(\frac{1}{2}\,(z_1 + z_2) - \frac{3}{2}\,\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) \tag{18}$$

Compte tenu des équations (17), l'équation (18) donne l'équation du mouvement oscillatoire du centre de masse,

$$\ddot{Z}_G = -\,\frac{k}{m}\left(Z_G - \frac{3}{2}\,\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) \tag{19}$$

La coordonnée verticale relative z et sa dérivée temporelle seconde $\ddot{z}$ s'écrivent,

$$z = z_2 - z_1 \qquad \text{et} \qquad \ddot{z} = \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 \tag{20}$$

La différence des équations du mouvement (6) et (16) s'écrit,

$$\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -\,\frac{k + 2k'}{m}\,(z_2 - z_1 - \ell_0) \tag{21}$$

Compte tenu des équations (20), l'équation (21) donne l'équation du mouvement oscillatoire relatif,

$$\ddot{z} = -\,\frac{k + 2k'}{m}\,(z - \ell_0) \tag{22}$$

4. (**1.0 point**) Déterminer les positions d'équilibre $z_{1,0}$ et $z_{2,0}$ des points matériels A et P.

   Solution 1 : A l'équilibre, les accélérations des points matériels s'annulent,

   $$\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0 \tag{23}$$

   Compte tenu de l'équation (23), les équations du mouvement (6) et (16) évaluées en $z_1 = z_{1,0}$ et $z_2 = z_{2,0}$ donnent les conditions d'équilibre,

   $$\begin{aligned} &k\,(z_{1,0} - \ell_0) - k'\,(z_{2,0} - z_{1,0} - \ell_0) + mg = 0 \\ &k\,(z_{2,0} - 2\ell_0) + k'\,(z_{2,0} - z_{1,0} - \ell_0) + mg = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

   La somme des équations (24) divisée par k et la différence des équations (24) divisée par $k+2k'$ s'écrivent,

   $$\begin{aligned} &z_{1,0} + z_{2,0} - 3\ell_0 + \frac{2mg}{k} = 0 \\ &z_{2,0} - z_{1,0} - \ell_0 = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

   Les solutions du système d'équations (25) sont les positions d'équilibre,

   $$z_{1,0} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \qquad \text{et} \qquad z_{2,0} = 2\ell_0 - \frac{mg}{k} \tag{26}$$

   Solution 2 : A l'équilibre, l'accélération du centre de masse et l'accélération relative s'annulent,

   $$\ddot{Z}_G = \ddot{z} = 0 \tag{27}$$

   Compte tenu de l'équation (27), les équations du mouvement (19) et (22) évaluées en $z_1 = z_{1,0}$ et $z_2 = z_{2,0}$ donnent les conditions d'équilibre,

   $$\begin{aligned} &Z_{G,0} \equiv \frac{1}{2}\,(z_{1,0} + z_{2,0}) = \frac{3}{2}\,\ell_0 - \frac{mg}{k} \\ &z_0 \equiv z_{2,0} - z_{1,0} = \ell_0 \end{aligned} \tag{28}$$

   Les solutions du système d'équations (28) sont les positions d'équilibre,

   $$z_{1,0} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \qquad \text{et} \qquad z_{2,0} = 2\ell_0 - \frac{mg}{k} \tag{29}$$

5. (**1.0 point**) Déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle totale V du système constitué des oscillateurs couplés. Prendre comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité des ressorts à vide.

   L'énergie cinétique s'écrit,

   $$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{z}_2^2 \tag{30}$$

   L'énergie potentielle totale V est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux points matériels et des énergies potentielles élastiques des trois ressorts,

   $$V = mgz_1 + mgz_2 + \frac{1}{2}\,k\,(z_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}\,k'\,(z_2 - z_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}\,k\,(z_2 - 2\ell_0)^2 \tag{31}$$